

# Berechnung des Wärmeaustausches in Regeneratoren mit zylindrischem und kugelförmigem Füllmaterial

Von B. STUKE, München

H. Hausen hat bei seiner Theorie<sup>1-4)</sup> für den streng periodischen Beharrungszustand der Regeneratoren angenommen, daß die Speichermasse aus Platten überall gleicher Dicke aufgebaut ist, die überdies theoretisch als unendlich ausgedehnt zu betrachten sind. Um den Einfluß der praktisch hier von mehr oder weniger abweichenden Gestalt der Speichermasse beurteilen zu können, wird die Theorie auf die beiden Fälle ausgedehnt, daß die Speichermasse aus Zylindern oder Kugeln besteht.

Regeneratoren sind Wärmeaustauscher, in denen eine Speichermasse abwechselnd von zwei Gasen verschiedener Temperatur bespült wird, die auf diese Weise in Wärmeaustausch treten. Kontinuierlicher Betrieb wird durch zwei oder mehr zusammenarbeitende Regeneratoren erreicht. Sie werden praktisch stets im Gegenstrom betrieben.

## Grundgedanken der Theorie von H. Hausen

Ursprünglich wurde die Theorie für die Regeneratoren der Tieftemperaturtechnik aufgestellt<sup>1,2)</sup>. Als Füllmaterial sind hier dünne Metallbleche großer Wärmeleitfähigkeit im Gebrauch. Die Wärmeleitung kann daher senkrecht zur Strömungsrichtung als unendlich groß angesehen, in Richtung der Strömung dagegen vernachlässigt werden. Wärmebilanzen ergeben Differentialgleichungen, die sich durch ein System von Eigenfunktionen lösen lassen. Physikalisch entsprechen die Eigenfunktionen der Auffassung, daß man die periodischen Temperaturänderungen im Regenerator als erzwungene Temperaturschwingung betrachtet und diese in die Grundschwingung und die Oberschwingungen zerlegt. Die Randbedingungen sind dabei durch die konstanten Eintrittstemperaturen der Gase gegeben. Die Anfangsbedingung, hier Umschaltbedingung genannt, ergibt sich aus der Tatsache, daß die Temperaturverteilung am Ende einer Heizperiode gleich der Temperaturverteilung zu Beginn der folgenden Kaltperiode sein muß und umgekehrt.

Der Temperaturverlauf im mittleren (größten) Teil des Regenerators wird durch die nullte Eigenfunktion (Grundschwingung) dargestellt, die sowohl im Gas als auch in der Speichermasse zeitlich linearen Temperaturverlauf<sup>5</sup> und in der Strömungsrichtung überall gleiche Steigung vorsieht. Hierbei ist vorausgesetzt, daß die Wärmekapazitäten der beiden durch den Regenerator strömenden Gase, bezogen auf die Dauer der Warm- bzw. Kaltperiode, einander gleich sind, d. h. es gilt

$$WT = W'T \quad (1).$$

Dabei bedeuten  $W$ ,  $W'$  die Wärmekapazitäten der Gase je Zeiteinheit,  $T$ ,  $T'$  die Periodendauern der Warm- bzw. Kaltperiode. Der lineare Temperaturanstieg wird an den Regeneratorenden durch die mit konstanter Temperatur eintretenden Gase gestört. Dieser Störung wird durch Überlagerung der höheren Eigenfunktionen (Oberschwingungen) über die nullte Eigenfunktion Rechnung getragen. Die höheren Eigenfunktionen klingen jedoch schnell in Richtung Regeneratormitte ab.

Bei Speichermassen anderer Materials (z. B. Schamottestein im Winderhitzer) lassen sich dagegen die Temperaturunterschiede innerhalb eines Querschnitts der Speichermasse nicht vernachlässigen. Hier wurde daher in Erweiterung der ursprünglichen Theorie endliche Wärmeleitung senkrecht zur Strömungsrichtung vorausgesetzt, die Wärmeleitung in Richtung der Strömung dagegen ebenfalls nicht berücksichtigt<sup>3,4)</sup>. Es ergeben sich auf diese Weise auch in jedem Querschnitt des Füllmaterials erzwungene Temperaturschwingungen. Bild 1 zeigt den Temperaturverlauf

<sup>1)</sup> H. Hausen, Über den Wärmeaustausch in Regeneratoren. Techn. Mech. u. Thermodyn. 1, 219 [1930].  
<sup>2)</sup> H. Hausen, Über die Theorie des Wärmeaustausches in Regeneratoren. Z. angew. Math. Mech. 9, 173 [1929].  
<sup>3)</sup> H. Hausen, Berechnung der Steintemperatur in Winderhitzern. Arch. Eisenhüttenwes. 12, 473 [1938/39].  
<sup>4)</sup> H. Hansen, Vervollständigte Berechnung des Wärmeaustausches in Regeneratoren. Z. Ver. dtsh. Ing. Beiheft Verfahrenstechnik 31 [1942].

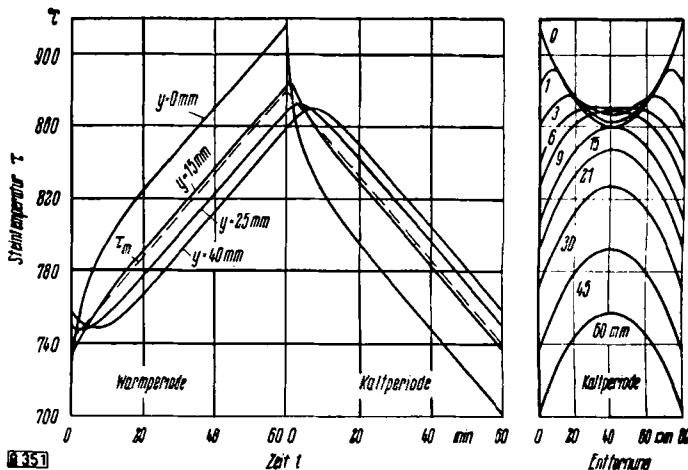


Bild 1  
Berechneter Temperaturverlauf in einem 80 mm dicken Regeneratorstein (Platte)

Periodendauer  $T = T' = 1$  [h], Wärmeleitzahl  $\lambda = 1$  [kcal/m h °C], spez. Gewicht  $\gamma = 2000$  [kg/m³], s.p.z. Wärme  $c = 0,25$  [kcal/kg °C],  $\left(\frac{\partial \tau_m}{\partial t}\right)_f = 140$  [°C/h], mittl. Steintemperatur zu Beginn der Periode ( $\tau_m$ )<sub>a</sub> = 740 [°C].

innerhalb der Speichermasse für ein bestimmtes Beispiel, und zwar links abhängig von der Zeit  $t$ , rechts abhängig von der Entfernung  $y$  der betrachteten Stelle im Querschnitt von der Oberfläche des Steins. Hierbei ist wieder vorausgesetzt, daß es sich um die Grundschwingung (nullte Eigenfunktion) des Regenerators handelt. Trägt man die Steintemperatur  $\tau$  an den verschiedenen Stellen des Querschnitts abhängig von der Zeit, aber für Warm- und Kaltperiode gegenläufig auf, dann ergeben sich geschlossene Kurvenzüge. Anders verhält sich der örtliche Mittelwert der Steintemperatur  $\tau_m$ , gemittelt über den gesamten Querschnitt. Sind nämlich gleiche Wärmekapazitäten der in Beziehung tretenden Gase, bezogen auf die Dauer der Warm- bzw. Kaltperiode, vorausgesetzt, so wird die mittlere Temperatur  $\tau_m$  durch eine gerade Linie (im Bild gestrichelt) dargestellt, die in der Warmperiode in der einen, in der Kaltperiode in der entgegengesetzten Richtung durchläuft. Es gilt daher:

$$T \left( \frac{\partial \tau_m}{\partial t} \right)_f = - T' \left( \frac{\partial \tau_m}{\partial t} \right)_f = \text{const.} \quad (2).$$

Dabei bedeuten  $t$  die Zeit und  $f$  die Oberfläche, gerechnet von der Eintrittsstelle des Gases in den Regenerator bis zum betrachteten Querschnitt.

Nennt man die Zeitpunkte zweier aufeinanderfolgender Perioden, denen in der zuletzt gewählten Darstellung derselbe Abszissenwert zukommt, einander entsprechende Zeiten, so folgt aus Gl. (2) für solche Zeiten

$$\tau_m = \tau_m' \quad (3).$$

Wenn man den Temperaturverlauf abhängig vom Ort im Querschnitt aufträgt (Bild 1 rechts), so wird er z. B. zu Beginn der Kaltperiode durch eine nach oben offene Parabel dargestellt. Infolge der zunächst nur in den äußeren Schichten wirkenden Abkühlung verformt sich die Kurve und geht bei nicht zu großen Steindicken bald in eine nach unten offene Parabel über, die sich dann mit unveränderter Gestalt und konstanter Geschwindigkeit nach unten verschiebt. Entsprechend umgekehrt ist es in der Warmperiode.

Für den Temperaturverlauf im Steinquerschnitt ergibt sich im Falle der unendlich ausgedehnten Platten:

$$\tau = \tau_m - \frac{\alpha \delta}{\lambda} (\vartheta - \tau_o) \left[ \frac{y}{\delta} \left( 1 - \frac{y}{\delta} \right) - \frac{1}{6} + \frac{T+T'}{T'} \right] \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-e^{-\frac{(2n\pi)^2 a T}{\delta}}) e^{-\frac{(2n\pi)^2 a t}{\delta}}}{(n\pi)^2 (1-e^{-\frac{(2n\pi)^2 a (T+T')}{\delta}})} \cos \left( 2n\pi \frac{y}{\delta} \right) \quad (4)$$

$$\tau' = \tau_m' + \frac{\alpha \delta}{\lambda} (\vartheta - \tau_o) \left[ \frac{y}{\delta} \left( 1 - \frac{y}{\delta} \right) - \frac{1}{6} \right] \frac{T+T'}{T'} \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-e^{-\frac{(2n\pi)^2 a T}{\delta}}) e^{-\frac{(2n\pi)^2 a t}{\delta}}}{(n\pi)^2 (1-e^{-\frac{(2n\pi)^2 a (T+T')}{\delta}})} \cos \left( 2n\pi \frac{y}{\delta} \right) \quad (5)$$

Dabei ist

$$\tau_m = (\tau_m)_a + \left( \frac{\partial \tau_m}{\partial t} \right)_f t + (\tau_m)_a + \frac{2 \alpha}{\gamma c d} (\vartheta - \tau_o) t \quad (6)$$

$$\tau_m' = (\tau_m')_a + \left( \frac{\partial \tau_m'}{\partial t} \right)_f t' + (\tau_m')_a + \frac{2 \alpha}{\gamma c d} (\vartheta' - \tau_o) t' \quad (7)$$

$\tau, \tau'$	Temperatur im Stein	$\lambda$ Wärmeleitzahl	des Füllmaterials
$\tau_o, \tau'_o$	Oberflächentemperatur	$c$ spez. Wärme	
$\tau_m, \tau_m'$	mittl. Temperatur im Steinquerschnitt	$\gamma$ spez. Gewicht	
$(\tau_m)_a, (\tau_m')_a$	Werte von $\tau_m$ bzw. $\tau_m'$ zu Beginn der Periode	$a$ Temperaturleitzahl	
$\vartheta, \vartheta'$	Temperatur der Gase	$\delta$ Plattendicke	
$\alpha, \alpha'$	Wärmeübergangszahlen		
$t, t'$	Zeiten		

Die Wärmedurchgangszahl  $k_o$  nach der nullten Eigenfunktion wird dargestellt durch:

$$\frac{1}{k_o} = (T+T') \left[ \frac{1}{\alpha T} + \frac{1}{\alpha' T'} + \left( \frac{1}{T} + \frac{1}{T'} \right) \frac{\delta}{6 \lambda} \varphi \right] \quad (8)$$

$$\varphi = 1 - 3 \frac{\delta^2}{2a} \left( \frac{1}{T} + \frac{1}{T'} \right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n\pi)^4} \cdot \frac{(1-e^{-\frac{(2n\pi)^2 a T}{\delta}})(1-e^{-\frac{(2n\pi)^2 a T'}{\delta}})}{(1-e^{-\frac{(2n\pi)^2 a (T+T')}{\delta}})} \quad (9)$$

$k_o$  ist definiert als diejenige Wärmemenge, die auf eine Vollperiode  $T+T'$  bezogen, je  $1 \text{ m}^2$  Heizfläche, 1 Grad mittleren Temperaturunterschiedes der austauschenden Gase  $(\vartheta - \vartheta')_M$  und je 1 h ausgetauscht wird.

$\varphi$  bedeutet in der Formel für  $k_o$  einen Korrekturfaktor, der im Falle sehr kleiner Plattendicke gleich Eins wird. Gl. (8) geht dann in eine sehr einfache Darstellung von  $k_o$  über, die schon früher von H. Hausen unter vereinfachten Bedingungen abgeleitet worden ist<sup>4)</sup>. Für  $\varphi$  lassen sich Näherungsgleichungen angeben, die in den angegebenen Bereichen sehr genau gelten.

$$\varphi = 1 - \frac{1}{30} \frac{\delta^2}{2a} \left( \frac{1}{T} + \frac{1}{T'} \right) \quad \text{für } \frac{\delta^2}{2a} \left( \frac{1}{T} + \frac{1}{T'} \right) \leq 10 \quad (10)$$

$$\varphi = \sqrt{\frac{2,142}{0,3 + \frac{\delta^2}{2a} \left( \frac{1}{T} + \frac{1}{T'} \right)}} \quad \text{für } \frac{\delta^2}{2a} \left( \frac{1}{T} + \frac{1}{T'} \right) \geq 10 \quad (11)$$

Der Wert 2,142 in Gl. (11) wurde durch eine Grenzbetrachtung exakt abgeleitet, während der Wert 0,3 unter der Wurzel empirisch bestimmt worden ist.

Aus der Grenzbetrachtung geht hervor, daß der Wärmeaustausch bei sehr großer Plattendicke von dieser unabhängig wird, was mit der Erfahrung übereinstimmt.

Für große Regeneratorlängen und kurze Periodendauern gibt  $k_o$  den Wärmeaustausch in erster Näherung genau genug wieder. Bei sehr kurzen Regeneratoren und sehr langen Periodendauern machen sich aber die durch den konstanten Temperatureintritt der Gase verursachten Störungen stark bemerkbar, so daß man auch die höheren Eigenfunktionen berücksichtigen muß. Die hierzu nötigen Rechnungen hat H. Hausen für die plattenförmige Füllung, von einer vereinfachenden Annahme abgesehen, exakt durchgeführt<sup>4)</sup>.

Bei den folgenden Betrachtungen über zylindrische und kugelförmige Speichermassen werden zunächst die Verhältnisse im Bereich der nullten Eigenfunktion betrachtet. Die Ergebnisse bei Berücksichtigung der höheren Eigenfunktionen können dann unmittelbar aus der angegebenen Arbeit<sup>4)</sup> übernommen werden.

### Erweiterung der Theorie auf zylinderförmige und kugelförmige Füllmengen

#### Differentialgleichungen des Wärmeaustauschs

##### Zylinderproblem

Da der Temperaturverlauf zylindersymmetrisch ist und die Wärmeleitung in Strömungsrichtung nicht berücksichtigt wird, gilt die Differentialgleichung:

$$\frac{\partial \tau}{\partial r} = \frac{a}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \tau}{\partial r} \right) \quad (12)$$

Die von den an der Oberflächeneinheit des Füllmaterials vorbeiströmenden Gasen in der Zeiteinheit abgegebene Wärmemenge ergibt sich aus dem Temperaturunterschied zwischen Gas und Oberfläche. Es ist somit:

$$-W \left( \frac{\partial \vartheta}{\partial f} \right)_t = \alpha (\vartheta - \tau_o) \quad (13)$$

Diese Wärmemenge fließt in die Speichermasse. Die mittlere Steintemperatur  $\tau_m$  steigt dadurch in der Zeiteinheit um  $\left( \frac{\partial \tau_m}{\partial t} \right)_f$ . Daher gilt auch

$$\frac{\gamma \cdot c \cdot R}{2} \left( \frac{\partial \tau_m}{\partial t} \right)_f = \alpha (\vartheta - \tau_o)$$

oder

$$\left( \frac{\partial \tau_m}{\partial t} \right)_f = \frac{2 \alpha}{\gamma \cdot c \cdot R} (\vartheta - \tau_o) \quad (14)$$

$R$  ist der Zylindrerradius,  $\frac{\gamma \cdot c \cdot R}{2}$  die Wärmekapazität, die zur Oberflächeneinheit des Zylinders gehört.

In der Kaltperiode gilt Gl. (14) ebenfalls. Es sind nur die entsprechenden gestrichenen Größen einzusetzen.  $f$  zählt in diesem Falle vom anderen Regeneratorende aus (Gegenstrom).

##### Kugelproblem

Hier sei angenommen, daß kugelsymmetrische Temperaturverteilung herrscht. Ist der Kugeldurchmesser, gemessen an den Dimensionen des Regenerators, hinreichend klein, so ist das sicher zulässig. Dann ist:

$$\frac{\partial \tau}{\partial r} = \frac{a}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \tau}{\partial r} \right) \quad (15)$$

Eine genaue Rechnung müßte auch den Polarwinkel berücksichtigen. Azimutal herrscht Symmetrie. — Für die zeitliche Änderung der mittleren Temperatur gilt hier

$$\left( \frac{\partial \tau_m}{\partial t} \right)_f = \frac{3 \alpha}{\gamma \cdot c \cdot R} (\vartheta - \tau_o) \quad (16)$$

## Temperaturverlauf nach der nullten Eigenfunktion

### Zylinderproblem

Für den zeitlich-örtlichen Temperaturverlauf im Zylinder sind entsprechende Bilder zu erwarten, wie sie in Bild 1 für die Platte dargestellt sind. Die Parabel, die sich gewisse Zeit nach Beginn einer Periode einstellt und dann mit konstanter Geschwindigkeit und unveränderter Gestalt verschiebt, ergibt sich aus Gl. (12), wenn man  $\frac{\partial \tau}{\partial t} = \text{const.}$  setzt. Um die Änderungen gleich nach dem Umschalten (Umstülpen der Parabel) zu berücksichtigen, überlagert man dieser Lösung eine Reihe, die sich aus partikulären Integralen (Eigenfunktionen) der Gl. (12) zusammensetzt.

Macht man, um diese partikulären Integrale zu finden, zur Lösung von Gl. (12) den Ansatz  $\tau = f(r) \cdot g(t)$ , so folgen nach Trennung der Veränderlichen die Differentialgleichungen

$$f''(r) + \frac{1}{r} f'(r) - \omega^2 f(r) = 0 \quad (17).$$

$$g'(t) + a \omega^2 g(t) = 0 \quad (18),$$

worin  $\omega^2$  einen Separationsparameter bedeutet.

Integration der Gl. (17) führt zu Besselschen Funktionen nullter Ordnung. Gl. (18) ist die bekannte Gleichung der harmonischen Schwingung.

Wir setzen also an:

$$\tau = C + \left( \frac{\partial \tau_m}{\partial t} \right)_f t + \frac{1}{4a} \left( \frac{\partial \tau_m}{\partial t} \right)_f (r^2 - R^2) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\omega_n^2 a t} J_0(\omega_n r) \quad (19),$$

entsprechend für die Kaltperiode

$$\tau' = C' + \left( \frac{\partial \tau_m'}{\partial t} \right)_f t' + \frac{1}{4a} \left( \frac{\partial \tau_m'}{\partial t} \right)_f (r^2 - R^2) + \sum_{n=1}^{\infty} A'_n e^{-\omega_n^2 a t'} J_0(\omega_n r) \quad (20).$$

Dabei sind  $C$ ,  $C'$ ,  $A_n$ ,  $A'_n$  und  $\omega_n$  zunächst willkürlich wählbare Konstanten.

Da sich nun  $\tau_m$  nach Gl. (2) linear mit der Zeit ändern soll, dürfen quadratisches Glied und Summe nichts zum Mittelwert beitragen. Damit die Mittelwerte dieser Glieder, gebildet über den gesamten Querschnitt, verschwinden, ist zum letzten Klammerausdruck des quadratischen Gliedes  $R^2/2$  zu addieren, während in der Summe die Werte  $\omega_n$  so bestimmt werden müssen, daß gilt:

$$\frac{1}{\pi R^2} \int_0^{R/2} \int_0^{2\pi} J_0(\omega_n r) r dr d\varphi = 0.$$

Die Quadratur dieses Integrals führt zu der Bedingungsgleichung

$$J_1(\omega_n R) = 0 \quad (21).$$

Daraus ergeben sich die Eigenwerte zu

$$\omega_n = \frac{l_{1n}}{R} \quad (22),$$

wobei  $l_{1n}$  die Nullstellen der Besselschen Funktion erster Ordnung  $J_1(x)$  bedeuten.

Gl. (19) lautet nun unter Berücksichtigung von Gl. (14)

$$\tau = \tau_m + \frac{\alpha}{2\lambda R} (\vartheta - \tau_o) \left( r^2 - \frac{R^2}{2} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\omega_n^2 a t} J_0(\omega_n r) \quad (23)$$

mit

$$\tau_m = (\tau_m)_a + \left( \frac{\partial \tau_m}{\partial t} \right)_f t = (\tau_m)_a + \frac{2\alpha}{\gamma c R} (\vartheta - \tau_o) t \quad (24).$$

Beachtet man, daß in der Warmperiode je Oberflächeneinheit eine ebenso große Wärmemenge  $q$  ausgetauscht wird wie in der Kaltperiode

$$q = \alpha' (\tau_o' - \vartheta') T' + \alpha (\vartheta - \tau_o) T \quad (25),$$

so geht Gl. (20) über in

$$\tau' = \tau_m' + \frac{\alpha}{2\lambda R} (\vartheta - \tau_o) \left( r^2 - \frac{R^2}{2} \right) \frac{T}{T'} + \sum_{n=1}^{\infty} A'_n e^{-\omega_n^2 a t'} J_0(\omega_n r) \quad (26)$$

mit

$$\tau_m' = (\tau_m')_a + \left( \frac{\partial \tau_m'}{\partial t} \right)_f t' = (\tau_m')_a + \frac{2\alpha'}{\gamma c R} (\vartheta' - \tau_o') t' \quad (27).$$

Die Zeit  $t$  bzw.  $t'$  wird jeweils mit dem Augenblick des Umschaltens neu gezählt.

Die Koeffizienten  $A_n$  und  $A'_n$  ergeben sich aus der Umschaltbedingung. Man setzt zunächst in Gl. (23)  $t = 0$  bzw.  $t = T$  und in Gl. (26)  $t' = T'$  bzw.  $t' = 0$  und subtrahiert die jeweils so entstehenden Gleichungen. Dann folgt wegen Gl. (3):

$$-\omega_n^2 a T \left( J_0(\omega_n R) - \frac{\alpha}{2\lambda R} (\vartheta - \tau_o) \left( r^2 - \frac{R^2}{2} \right) \left( 1 + \frac{T}{T'} \right) \right) = f(r) \quad (28),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( A_n - A'_n e^{-\omega_n^2 a T'} \right) J_0(\omega_n r) = -f(r) \quad (29).$$

Wegen der Orthogonalität der Bessel-Funktionen lassen sich die Klammerausdrücke unter dem Summenzeichen in Gl. (28) und (29) als Koeffizienten einer Reihenentwicklung nach Besselschen Funktionen<sup>5)</sup> auffassen und entsprechend bestimmen. Man erhält schließlich zwei Gleichungen für  $A_n$  und  $A'_n$  und daraus:

$$A_n = \frac{B \left( 1 - e^{-\omega_n^2 a T'} \right)}{\left( 1 - e^{-\omega_n^2 a (T + T')} \right)}$$

$$A'_n = \frac{B \left( 1 - e^{-\omega_n^2 a T} \right)}{\left( 1 - e^{-\omega_n^2 a (T + T')} \right)}$$

mit

$$B = \frac{2\alpha R (\vartheta - \tau_o) (T + T')}{\gamma c T' l_{1n}^2 J_0(l_{1n})}$$

### Kugelproblem

Geht man mit dem Ansatz  $\tau = f(r) \cdot g(t)$  in Gl. (15) hinein, so erhält man

$$f''(r) + \frac{2}{r} f'(r) - \beta^2 f(r) = 0 \quad (30),$$

$$g'(t) + a \beta^2 g(t) = 0 \quad (31).$$

Dabei ist der Separationsparameter mit  $\beta^2$  bezeichnet.

Gl. (30) hat als Lösung<sup>6)</sup>

$$f(r) = \frac{J_{1/2}(\beta r)}{\sqrt{\beta r}} \cdot \frac{\sin(\beta r)}{\beta r \sqrt{\pi/2}} \quad (32)$$

wegen

$$J_{1/2} = \frac{\sin(\beta r)}{\sqrt{\frac{\pi \beta r}{2}}}$$

$J_{1/2}$  sind die Besselschen Funktionen mit dem Parameter  $1/2$ . Gl. (31) ist dieselbe wie Gl. (18).

Der weitere Verlauf der Rechnung ist wie beim Zylinderproblem. Mit

$$\beta_n = \frac{l_n}{R} \quad (33),$$

wobei  $l_n$  die Lösungen von

$$\operatorname{tg} x - x = 0 \quad (34)$$

sind und im Hinblick darauf, daß die Funktionen  $\sin(\beta_n r)$  mit der Bedingung  $\operatorname{tg}(\beta_n R) = \beta_n R$  wieder orthogonal sind, erhält man schließlich für den Temperaturverlauf:

$$\tau = \tau_m + \frac{\alpha}{2\lambda R} (\vartheta - \tau_o) \left[ \left( r^2 - \frac{3}{3} R^2 \right) - \frac{4 R^3 (T + T')}{r T'} \right] + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1 - e^{-\beta_n^2 a T'}}{l_n^2 \sin l_n} \right) \left[ \frac{e^{-\beta_n^2 a T'} \sin(\beta_n r)}{1 - e^{-\beta_n^2 a (T + T')}} \right] \quad (35),$$

<sup>5)</sup> Bezüglich Besselfunktionen s. Frank-Mises: Differential- und Integralgleichungen der Physik. Braunschweig 1935.

<sup>6)</sup> Die genaue Rechnung mit Berücksichtigung des Polarwinkels würde liefern:

$$f(r, \xi) = \frac{P_l(\xi) J_{l+1}(\beta r)}{\sqrt{\beta r}} \quad l = 0, 1, 2, \dots$$

Dabei ist  $\xi = \cos \vartheta$  ( $\vartheta$  Polarwinkel),  $P_l$  sind die Legendreschen Polynome. Das erste Glied dieses Eigenfunktionssystems entspricht unserem Ansatz Gl. (32), da  $P_0(\xi) = 1$  ist.

$$\tau' - \tau_m' = \frac{\chi}{2\lambda R} (\vartheta - \tau_o) \left[ \left( r^2 - \frac{3}{5} R^2 \right) \frac{T}{T'} - \frac{4 R^3 (T + T')}{r T'} \right] \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1 - e^{-\beta_n a T}}{l_n^2 \sin l_n} \frac{e^{-\beta_n a T'}}{1 - e^{-\beta_n^2 a (T + T')}} \right) \sin(\beta_n r) \quad (36)$$

mit

$$\tau_m = (\tau_m) a + \left( \frac{\partial \tau_m}{\partial t} \right)_f t + (\tau_m) a + \frac{3 \chi}{\gamma c R} (\vartheta - \tau_o) t \quad (37),$$

$$\tau_m' = (\tau_m') a + \left( \frac{\partial \tau_m'}{\partial t} \right)_f t' + (\tau_m') a + \frac{3 \chi'}{\gamma c R} (\vartheta' - \tau_o') t' \quad (38).$$

### Ergebnisse der Berechnung des Temperaturverlaufs

In Bild 2 und 3 ist der zeitlich-örtliche Temperaturverlauf im Falle des Zylinders für die Radien  $R = 40$  und  $R = 80$  mm, in Bild 4 und 5 im Falle der Kugel für  $R = 40$  und  $R = 120$  mm dargestellt. Im übrigen sind die gleichen Zahlengrößen wie zu Bild 1 verwendet.

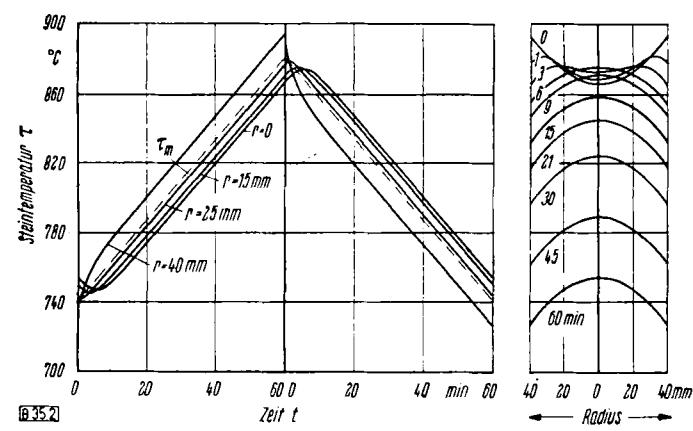


Bild 2

Temperaturverlauf in einem Zylinderquerschnitt  $R = 40$  mm

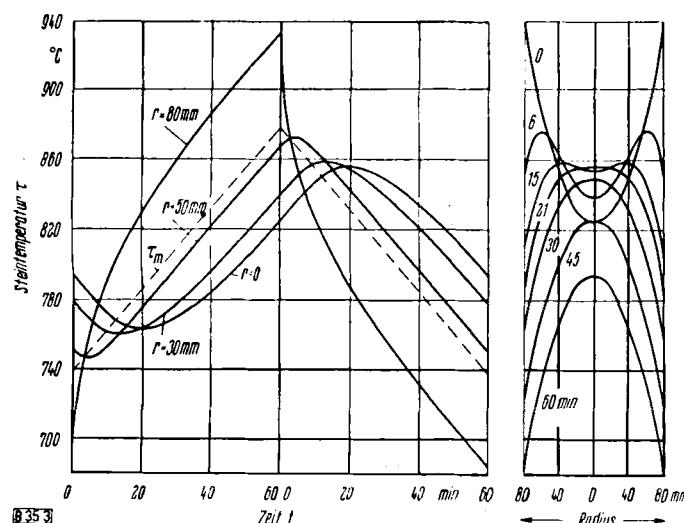


Bild 3

Temperaturverlauf in einem Zylinderquerschnitt  $R = 80$  mm

Bild 2 und 4 sind unter der Annahme berechnet, daß der Durchmesser von Zylinder bzw. Kugel gleich der Plattendicke  $\delta$  ist. Es ist klar ersichtlich, wie durch das größere Verhältnis von Oberfläche zu Volumen das Innere des Zylinders und noch mehr das der Kugel im Vergleich zur Platte verstärkt am Temperaturaus tausch teilnimmt.

Die Durchmesser 80, 160 und 240 mm für Platte, Zylinder, Kugel sind hingegen so gewählt, daß der Quotient  $\frac{\text{Oberfläche}}{\text{Volumen}}$  in allen drei Fällen denselben Wert hat. Die entsprechenden Durchmesser seien „gleichwertige Plattendicken“ genannt.

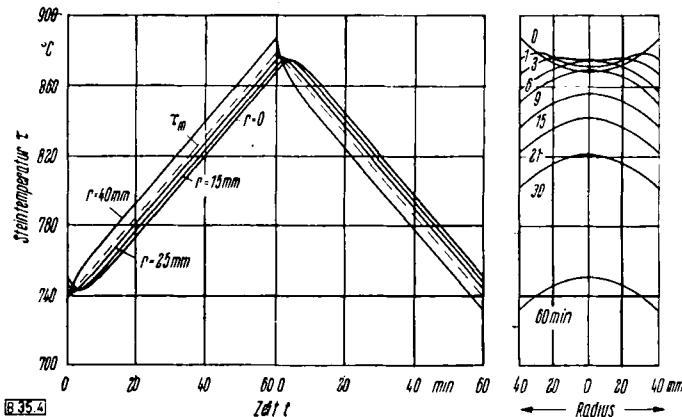


Bild 4  
Temperaturverlauf in einem Kugelquerschnitt  $R = 40$  mm

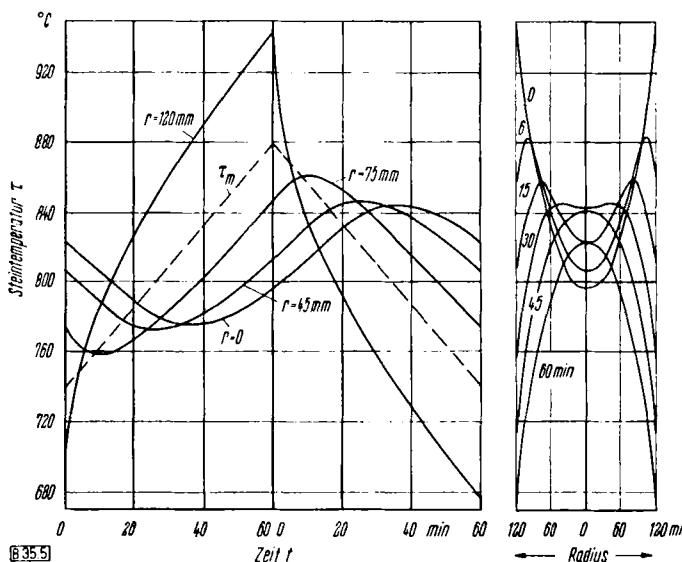


Bild 5  
Temperaturverlauf in einem Kugelquerschnitt  $R = 120$  mm

### Die Wärmedurchgangszahl $k_0$ nach der nullten Eigenfunktion

Nachdem durch die Gl. (23), (24) und (26), (27) der Temperaturverlauf im Regenerator bekannt ist, läßt sich auch die in einer Vollperiode aufgenommene und wiederabgegebene Wärme menge und daraus die Wärmedurchgangszahl  $k_0$  berechnen.

#### Zylinderproblem

Zunächst werde der zeitliche Mittelwert der Oberflächen temperatur in Warm- und Kaltperiode bestimmt. In Gl. (23) und (26) ist  $r = R$  zu setzen und über die Zeit  $t$  bzw.  $t'$  von 0 bis  $T$ , bzw. 0 bis  $T'$  zu integrieren.

Es ergibt sich

$$(\tau_o)_M - (\tau_m)_M = \frac{\chi R}{4 \lambda} (\vartheta - \tau_o) \varphi_z \quad (39),$$

worin der Index  $M$  das zeitliche Mittel kennzeichnet und

$$\varphi_z = 1 - \frac{8 R^2}{a} \left( \frac{1}{T} + \frac{1}{T'} \right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1 - e^{-\omega_n^2 a T}) (1 - e^{-\omega_n^2 a T'})}{l_n^4 (1 - e^{-\omega_n^2 a (T + T')})} \quad (40)$$

ist. Ebenso wird

$$(\tau_m')_M - (\tau_o')_M = \frac{\chi R}{4 \lambda} (\vartheta' - \tau_o) \frac{T}{T'} \varphi_z \quad (41).$$

Hieraus wollen wir den zeitlichen Mittelwert des Unterschiedes der Gastemperaturen in Warm- und Kaltperiode bestimmen. Hier für gilt zunächst

$$(\vartheta - \vartheta')_M = (\vartheta - \tau_o) + [(\tau_o)_M - (\tau_m)_M] + [(\tau_m')_M - (\tau_o')_M] \\ + (\tau_o' - \vartheta') \quad (42);$$

denn nach Gl. (2) und (14) sind  $\vartheta - \tau_o = \text{const}$  und  $\tau_o' - \vartheta' = \text{const}$ . Setzt man Gl. (39) und (41) in Gl. (42) ein, so folgt unter Berücksichtigung von Gl. (25)

$$(\vartheta - \vartheta')_M = (\vartheta - \tau_o) \left[ 1 + \frac{\alpha}{\alpha' T'} + \left( 1 + \frac{T}{T'} \right) \frac{\alpha R}{4 \lambda} \varphi_z \right] \quad (43).$$

Ferner gilt nach der Definition der Wärmedurchgangszahl für die Wärmemenge die je  $m^2$  Heizfläche in einer Vollperiode vom Füllmaterial aufgenommen und wieder abgegeben wird:

$$q = \alpha(\vartheta - \tau_o) = k_o(\vartheta - \vartheta')_M(T + T') \quad (44).$$

Für die Wärmedurchgangszahl  $k_o$  folgt daraus mit Gl. (43)

$$\frac{1}{k_o} = (T + T') \left[ \frac{1}{\alpha T} + \frac{1}{\alpha' T'} + \left( \frac{1}{T} + \frac{1}{T'} \right) \frac{R}{4 \lambda} \varphi_z \right] \quad (45).$$

### Kugelproblem

Der Gang der Rechnung ist der gleiche. Man erhält

$$\varphi_K = 1 - \frac{10 R^2}{a} \left( \frac{1}{T} + \frac{1}{T'} \right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-e^{-\beta_n^2 a T})(1-e^{-\beta_n^2 a T'})}{l_n^4 (1-e^{-\beta_n^2 a (T+T')})} \quad (46),$$

$$\frac{1}{k_o} = (T + T') \left[ \frac{1}{\alpha T} + \frac{1}{\alpha' T'} + \left( \frac{1}{T} + \frac{1}{T'} \right) \frac{R}{5 \lambda} \varphi_K \right] \quad (47).$$

### Einheitliche Darstellung der Wärmedurchgangszahl $k_o$ für Platte, Zylinder und Kugel

Die für Platte, Zylinder und Kugel gefundenen Ergebnisse lassen sich leicht in eine einheitliche und übersichtliche Gestalt bringen. Setzt man nämlich in Gl. (8) und (9)  $\delta = D$ , in den Gl. (45) und (47) für Kugel und Zylinder den Durchmesser  $2R = D$

und führt man statt  $\frac{\varphi}{6}$ ,  $\frac{\varphi_z}{8}$  bzw.  $\frac{\varphi_K}{10}$  die Funktion  $\Phi$  ein, dann folgt

$$\frac{1}{k_o} = (T + T') \left[ \frac{1}{\alpha T} + \frac{1}{\alpha' T'} + \left( \frac{1}{T} + \frac{1}{T'} \right) \frac{D}{\lambda} \Phi \right] \quad (48)$$

mit

$$\Phi = K - \frac{D^2}{4a} \left( \frac{1}{T} + \frac{1}{T'} \right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-e^{-\left(\frac{2l}{D}\right)^2 a T})(1-e^{-\left(\frac{2l}{D}\right)^2 a T'})}{l^4 (1-e^{-\left(\frac{2l}{D}\right)^2 a (T+T')})} \quad (49).$$

Diese Gleichungen umfassen alle drei Fälle; man hat nur für  $K$  und  $l$  jeweils die nachstehenden Größen einzusetzen.

$$l = \begin{cases} n\pi \text{ Nullstellen von } \sin x & K \begin{cases} 1/6 & \text{Platte} \\ I_1(x) & \text{Zylinder} \\ l_n & \text{Kugel} \\ \operatorname{tg} x - x & \end{cases} \\ \end{cases} \quad (50).$$

Gl. (49) läßt sich umformen, indem man unter dem Summenzeichen  $\frac{1}{l^4}$  addiert und subtrahiert

$$\Phi = K - \frac{D^2}{4a} \left( \frac{1}{T} + \frac{1}{T'} \right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{l^4} + \frac{D^2}{4a} \left( \frac{1}{T} + \frac{1}{T'} \right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{l^4} \cdot \frac{-\left(\frac{2l}{D}\right)^2 a T - \left(\frac{2l}{D}\right)^2 a T' - \left(\frac{2l}{D}\right)^2 a (T+T')}{(1-e^{-\left(\frac{2l}{D}\right)^2 a (T+T')})} e + e - 2e \quad (51).$$

Diese Darstellung hat den Vorteil, daß die Summe im letzten Glied sehr schnell konvergiert. Für kleine Werte von  $\frac{D^2}{4a} \left( \frac{1}{T} + \frac{1}{T'} \right)$  braucht man sie gar nicht zu berücksichtigen. H. Hausen fand auf diese Weise als Näherungslösung für die Platte die oben angegebene Gl. (10).

Für alle drei Fälle einheitlich dargestellt gilt entsprechend

$$\Phi = K - \frac{D^2}{4a} \left( \frac{1}{T} + \frac{1}{T'} \right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{l^4}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{l^4} =$$

$$\begin{cases} 1/\varphi_0 = 0,0111 \\ 0,00521 \text{ im Bereich } \frac{D^2}{4a} \left( \frac{1}{T} + \frac{1}{T'} \right) \leq 5 \\ 0,002857 \end{cases} \quad (52),$$

worin ebenso wie in den nachfolgenden Gleichungen die Werte von  $l$  für  $n = 1, 2, 3$  usw. nach Gl. (50) einzusetzen sind.

Im Sonderfalle  $T = T'$  gehen die Gl. (49) und (51) über in

$$\Phi = K - \frac{D^2}{2aT} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{l^4} \operatorname{tg} \left[ \left( \frac{l}{D} \right)^2 2aT \right] \quad (53),$$

$$\Phi = K - \frac{D^2}{2aT} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{l^4} + \frac{D^2}{2aT} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{l^4} \left[ 1 - \operatorname{tg} \left\{ \left( \frac{l}{D} \right)^2 2aT \right\} \right] \quad (54).$$

Auch die von H. Hausen auf die Werte von  $\Phi$  bei großem Argument angewandte Grenzwertmethode<sup>4)</sup> im Falle  $T = T'$  läßt sich auf alle drei Fälle übertragen. Dabei wies er nach, daß die Wärmedurchgangszahl für große Steindicken von diesen unabhängig werden muß.

Man muß lediglich beachten, daß beim Plattenproblem der Unterschied zwischen zwei benachbarten  $l$ -Werten immer gleich  $\pi$  ist, bei Zylinder und Kugel dagegen dies nur asymptotisch der Fall ist. Da aber der Integrand des in der Ableitung auftretenden Integralausdruckes nur bei unendlichen Werten von  $u$  nicht verschwindet, gilt der von H. Hausen abgeleitete Grenzwert für alle drei Fälle. Nimmt man noch eine für jeden Fall einzeln empirisch bestimmte Konstante  $\epsilon$  in den Grenzwert hinein, so erhält man drei Näherungsformeln für den an Gl. (52) anschließenden Bereich. Geschlossen dargestellt lauten diese Näherungen:

$$\Phi = \frac{0,2524}{\sqrt{\epsilon + \frac{D^2}{4a} \left( \frac{1}{T} + \frac{1}{T'} \right)}} \quad \text{mit } \epsilon = \begin{cases} 0,15 & \text{für } \frac{D^2}{4a} \left( \frac{1}{T} + \frac{1}{T'} \right) \geq 5 \\ 0,55 & \text{für } \frac{D^2}{4a} \left( \frac{1}{T} + \frac{1}{T'} \right) \geq 10 \\ 1,5 & \end{cases} \quad (55).$$

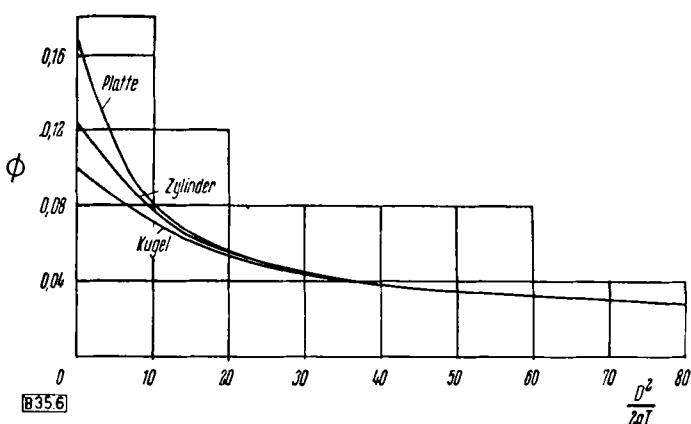


Bild 6  
Darstellung der Funktionen  $\Phi$  für  $T = T'$

In Bild 6 ist der Verlauf der Funktion  $\Phi$  für Platte, Zylinder und Kugel nach genauer Berechnung dargestellt für den Fall  $T = T'$ . Die Kurve für den Zylinder liegt unter derjenigen für die Platte, und die der Kugel unter denen für Platte und Zylinder. Das bedeutet nach Gl. (48), daß bei sonst gleichen Verhältnissen der Wärmeaustausch bei Kugelfüllung besser ist als bei Zylinderfüllung und hier wiederum besser als bei Plattenfüllung. Dieses Resultat folgt auch aus der Anschauung. Da die Wärme bei Zylindern in zwei Dimensionen, bei Kugeln in allen drei Dimensionen radial strömt, nimmt die Steinmitte jeweils mehr am Wärmeaustausch teil.

Daß sich die drei Kurven sehr schnell demselben Kurvenverlauf asymptotisch nähern, ist ebenfalls aus dem physikalischen Sachverhalt zu erwarten. Denn bei genügend großem Radius oder unendlich kleiner Temperaturleitzahl (Kugel) nimmt nur die Schicht unmittelbar unter der Oberfläche am Wärmeaustausch teil.

Im Anschluß an diese Ergebnisse wäre es von Interesse, festzustellen, ob vielleicht sämtliche  $\Phi$ -Kurven, die sich aus der Verwendung irgendwie geformten Füllmaterials ergeben, im Gebiet zwischen den  $\Phi$ -Kurven für Platte und Kugel liegen. Im Argument müßte dann an Stelle von  $D$  ein allgemeinerer Ausdruck treten, da sich die geometrischen Verhältnisse im allgemeinen nicht durch eine einzige unabhängige Variable wiedergeben lassen.

Man darf wohl annehmen, daß die genannte Vermutung für alle in der Praxis vorkommenden Fälle zutrifft. Diese Frage könnte indessen nur auf Grund einer weiteren eingehenden Untersuchung mit Sicherheit entschieden werden. Im nächsten Abschnitt sei die Frage geprüft, ob man die Plattenformel nach einem Vorschlag von H. Hausen näherungsweise auch für Zylinder und Kugelfüllung verwenden kann, wenn man die gleichwertigen Plattendicken benutzt.

In Bild 7 ist  $\Phi$  für Zylinder für  $T = 2 T'$  und  $T = 4 T'$ , bzw.  $T' = 2 T$  und  $T' = 4 T$  dargestellt. Die Kurven verlaufen einander so nahe, daß man in der Praxis mit den Werten für  $T = T'$  genau genug rechnen kann. Entsprechendes gilt für die Kugelfüllung.

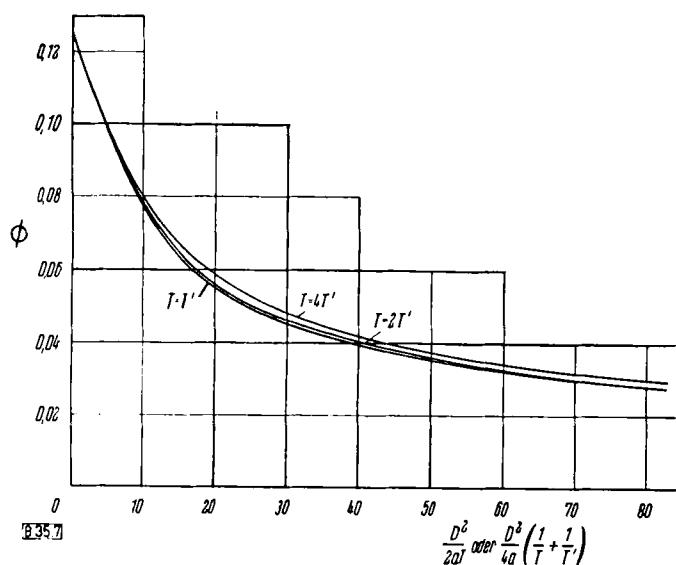


Bild 7  
Φ für Zylinder bei verschieden langer Warm- und Kaltperiode

Bild 8 zeigt die Abhängigkeit der Wärmedurchgangszahl  $k_0$  vom Durchmesser der Platte bzw. des Zylinders und der Kugel für ein Beispiel, dem die Zahlenwerte von Bild 1 und  $\alpha = \alpha' = 20 \text{ kcal/m}^2 \text{ h } ^\circ\text{C}$  zugrunde gelegt sind.

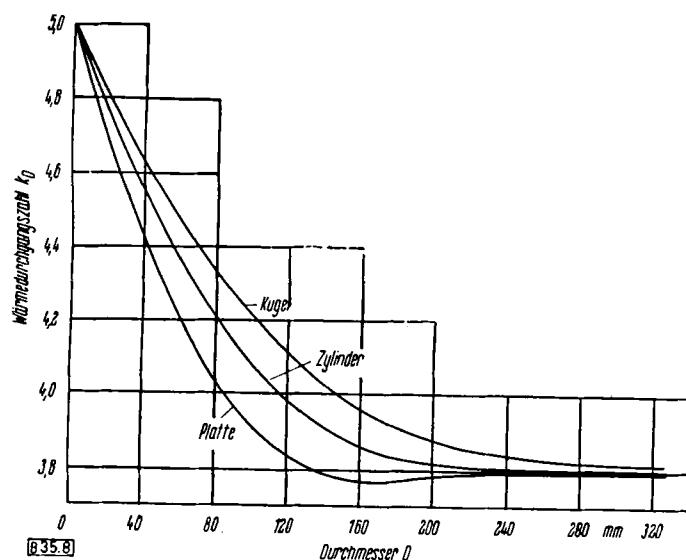


Bild 8  
Darstellung der Wärmedurchgangszahl  $k_0$  in Abhängigkeit vom Durchmesser  $D$   
 $\alpha = \alpha' = 20 \text{ kcal/m}^2 \text{ h } ^\circ\text{C}$

### Verwendung der Plattenformel für alle drei Fälle unter Benutzung der „gleichwertigen Plattendicke“

Diese Frage geht von der Überlegung aus, daß die Oberfläche  $F$  des Füllmaterials für den Wärmeaustausch, das Volumen  $V$  für die Wärmespeicherung verantwortlich ist. Das Verhältnis beider könnte also eine geeignete Grundlage zur Angleichung der drei Fälle sein.

Man errechnet aus den  $\Phi$ -Werten für Platte, Zylinder und Kugel eine Funktion  $\Phi'$ , indem man nach Gl. (48)

$$\frac{\delta}{\lambda} \Phi' = \frac{D}{\lambda} \Phi \quad (52)$$

setzt, wenn  $\delta = 2V/F$  die gleichwertige Plattendicke bedeutet. Die gleichwertigen Plattendicken und damit die  $\Phi'$ -Werte betragen hiernach

Platte	$\delta_P = D_P$	$\Phi_{P'} = \Phi_P$
Zylinder	$\delta_Z = \frac{D_Z}{2}$	$\Phi_{Z'} = 2 \Phi_Z$
Kugel	$\delta_K = \frac{D_K}{3}$	$\Phi_{K'} = 3 \Phi_K$

(53).

Ebenso folgt für das Argument

$$\frac{\delta P^2}{2aT} = \frac{D_P^2}{2aT} \text{ bzw. } \frac{\delta Z^2}{2aT} = \frac{1}{4} \cdot \frac{D_Z^2}{2aT} \text{ bzw. } \frac{\delta K^2}{2aT} = \frac{1}{9} \cdot \frac{D_K^2}{2aT}$$

$\Phi$  und  $\Phi'$  für die Platte sind identisch, während die Umrechnung für Zylinder und Kugel auf eine einfache Transformation hinausläuft. Für den Zylinder muß die Abszisse auf den vierten Teil zusammengeschoben und die Ordinate verdoppelt, für die Kugel die Abszisse auf den neunten Teil verkleinert, die Ordinate verdreifacht werden.

Diese Funktionen  $\Phi'$  werden nun verglichen mit dem  $\Phi'$ -Wert für die Platte. Bild 9 zeigt diesen Vergleich. Die drei  $\Phi'$ -Kurven liegen ab  $\frac{\delta^2}{2aT} > 4$  nahe beieinander. Doch dürfte für die meisten

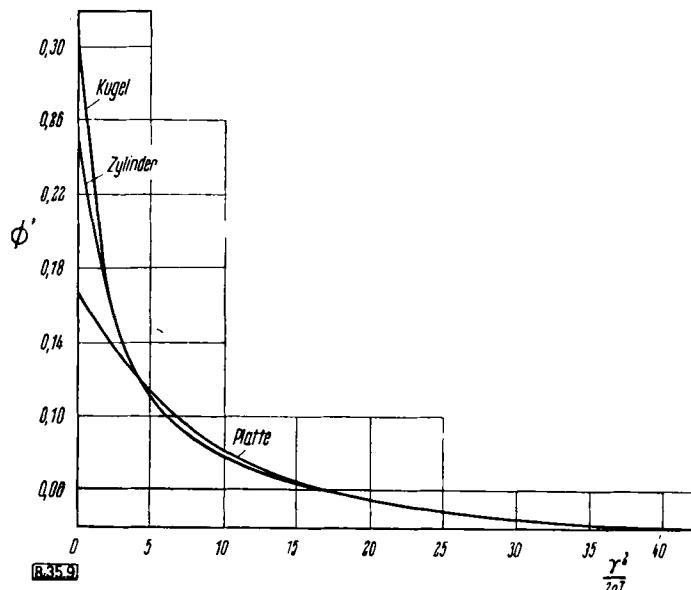


Bild 9  
Vergleich der Funktionen  $\Phi'$  für Platte, Zylinder und Kugel

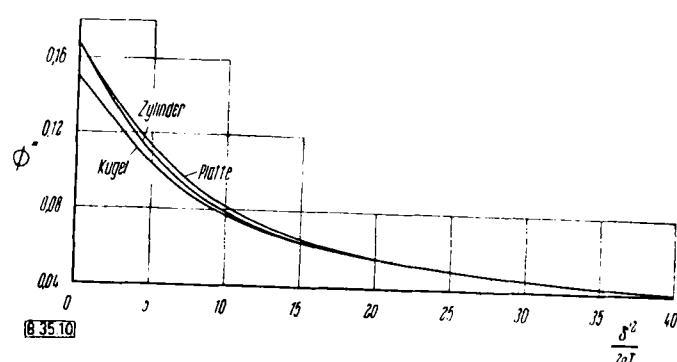


Bild 10  
Vergleich der Funktionen  $\Phi''$  für Platte, Zylinder und Kugel

in der Praxis vorkommenden Fälle der Bereich für  $\frac{\delta^2}{2aT} < 4$  in Frage kommen.

Eine noch allgemeiner verwendbare gleichwertige Plattendicke erhält man durch die Definition  $\delta' = \frac{D}{2} + \frac{V}{F}$ , die das arithmetische Mittel zwischen einem für das betreffende Material abzuschätzenden halben Durchmesser und der Hälfte der vorher eingeführten gleichwertigen Plattendicke  $\delta$  darstellt. Hierbei geht die  $\Phi$ -Kurve für die Platte wieder in sich selbst über. Die neuen  $\Phi'$ -Kurven für Zylinder und Kugel liegen nun jedoch, wie Bild 10 zeigt, der Kurve für die Platte im ganzen Bereich so nahe, daß man diese Kurve auf jede beliebig geformte Speichermasse mit genügender Genauigkeit anwenden kann.

### Die wahre Wärmedurchgangszahl $k$

Um den Einfluß der höheren Eigenfunktionen zu berücksichtigen, zeigte H. Hausen, daß man für diese mit sehr guter Näherung so rechnen kann, als ob im gesamten Querschnitt des Steins die gleiche Temperatur  $\tau_m$  herrscht<sup>2)</sup>. Er definierte eine neue Wärmeübergangszahl  $\bar{\alpha}$ , die sich auf die mittlere Steintemperatur  $\tau_m$  bezieht, und konnte damit die Ergebnisse seiner erstgenannten Arbeit<sup>2)</sup>, die auch die höheren Eigenfunktionen berücksichtigt, aber zunächst unendliche Wärmeleitfähigkeit in einem Querschnitt der Speichermasse voraussetzt, unmittelbar auf den Fall von Platten beliebiger Dicke und Wärmeleitzahl anwenden.

Dieses  $\bar{\alpha}$  ergibt sich auf folgende Weise. Man nimmt den Unterschied zwischen  $\tau_0$  und  $\tau_m$  und daher auch zwischen  $\vartheta$  und  $\tau_m$  in jedem Augenblick als ebenso groß an, wie er sich bei gleicher in der Zeiteinheit übertragener Wärmemenge im Zeitmittel aus der nullten Eigenfunktion errechnet. Gl. (39) gibt den zeitlichen Mittelwert von  $\tau_0 - \tau_m$  an. Sie läßt sich durch Einführen von  $\Phi$  so umformen, daß sie für alle drei Fälle gilt. Sie lautet dann

$$(\tau_0)_M - (\tau_m)_M = \frac{\alpha D}{\lambda} (\vartheta - \tau_0) \Phi \quad (54).$$

Hierzu addieren wir auf beiden Seiten den im Bereich der nullten Eigenfunktion konstanten Wert  $\vartheta - \tau_0$  und erhalten

$$(\vartheta - \tau_m)_M = \left( \frac{1}{\bar{\alpha}} + \frac{D}{\lambda} \Phi \right) (\vartheta - \tau_0) \quad (55).$$

$q = \bar{\alpha} (\vartheta - \tau_m) T$  ist die während einer Periode je Flächeneinheit übertragene Wärmemenge. Mit Einführung der auf  $\tau_m$  bezogenen Wärmeübergangszahl  $\bar{\alpha}$  muß hierfür aber auch gelten

$$q = \bar{\alpha} (\vartheta - \tau_m)_M T \quad (56).$$

Daher folgt aus Gl. (55) für  $\bar{\alpha}$  die Beziehung

$$\frac{1}{\bar{\alpha}} = \frac{1}{\alpha} + \frac{D}{\lambda} \Phi \quad (57),$$

die für Platten-, Zylinder- und Kugelfüllung in gleicher Weise gilt. Unter Verwendung der so bestimmten Wärmeübergangszahl kann man also die Betrachtungen von Hausen über die höheren Eigenfunktionen auch auf die Fälle der Zylinder- und Kugelfüllung übertragen.

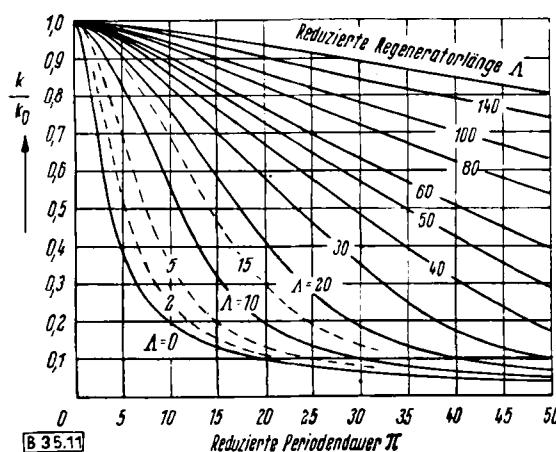


Bild 11

Verhältnis der wahren Wärmedurchgangszahl  $k$  zur Wärmedurchgangszahl  $k_0$  nach der nullten Eigenfunktion

Als Endergebnis dieser Betrachtungen erhält man die wahre Wärmedurchgangszahl  $k$ , die den Einfluß sämtlicher Eigenfunktionen auf den Wärmeaustausch berücksichtigt, während  $k_0$  nach Gl. (48) sich nur auf die nullte Eigenfunktion bezieht. Das Verhältnis  $k/k_0$  kann man unmittelbar aus Bild 11 ablesen.  $k/k_0$  ist nur eine Funktion von zwei dimensionslosen Kenngrößen, der sog. reduzierten Regeneratorlänge  $\Lambda = 4 \frac{k_0(T + T')F}{WT + W'T}$  und der reduzierten Periodendauer  $\Pi = 2 \frac{k_0(T + T')}{C}$ . Im ersten Ausdruck bedeutet  $F$  die gesamte wärmeübertragende Oberfläche des Regenerators, im zweiten ist für  $C$  die Wärmekapazität des Füllmaterials je Oberflächeneinheit zu setzen, d. h. im Falle der Platte  $C = \frac{\gamma \cdot c \cdot D}{2}$ , des Zylinders  $C = \frac{\gamma \cdot c \cdot D}{4}$ , der Kugel  $C = \frac{\gamma \cdot c \cdot D}{6}$ . Diese etwas andere Ermittlung von  $C$  für Zylinder und Kugel ist der einzige Unterschied, der bei der Bestimmung von  $k/k_0$  gegenüber der ursprünglichen Berechnungsweise von Hausen zu beachten ist.

### Zusammenfassung

Die Theorie von H. Hausen über den Wärmeaustausch in mit Platten gefüllten Regeneratoren wird auf Zylinder und Kugelfüllung erweitert.

Die Berechnung des Temperaturverlaufs im Zylinder- und Kugelquerschnitt für verschiedene Durchmesser und der Vergleich mit dem Temperaturverlauf im Plattenquerschnitt zeigt, in wieviel höherem Maße die Zylinder- und noch mehr die Kugelmitte an den Temperaturschwankungen teilnimmt. Aus diesem Grunde ist auch die Wärmedurchgangszahl bei sonst gleichen Verhältnissen, d. h. gleichem Material, gleichem Durchmesser bzw. gleicher Dicke usw., für die Kugelfüllung größer als für Zylinderfüllung und hier wiederum größer als bei Plattenfüllung. Die Unterschiede werden jedoch um so geringer, je größer die Durchmesser des Füllmaterials oder je kleiner die Temperaturleitzahl oder die Periodendauer sind. Sie verschwinden schließlich vollständig, weil dann nur die der Oberfläche zunächst liegenden Teile der Speichermasse an den Temperaturschwankungen teilnehmen und hierbei die geometrische Form der Oberfläche kaum mehr eine Rolle spielt.

Als Endergebnis der Berechnungen, die sich im wesentlichen auf die Grundschwingung des Regenerators beziehen, erhält man eine Gleichung für die Wärmedurchgangszahl  $k_0$ , die für Platten-, Zylinder- und Kugelfüllung dieselbe Gestalt hat. Die oben genannten Unterschiede kommen durch verschiedene Werte einer in ihr auftretenden Funktion zum Ausdruck. Mit zunehmender Kenngröße nehmen diese Werte ab, wobei sich die Unterschiede verkleinern. Sie nähern sich rasch einem gemeinsamen Kurvenverlauf.

Wenn man gleichwertige Plattendicken  $\delta$  einführt, die in allen drei Fällen durch das doppelte Verhältnis von Volumen zu Oberfläche der Speichermasse bestimmt sind, erhält man eine in einem relativ großen Bereich mit guter Näherung für Platte, Zylinder und Kugel gemeinsam gültige Formel zur Berechnung von  $k_0$ , die sich im gleichen Bereich wahrscheinlich auch auf jede beliebige Füllmaterialform anwenden läßt. Eine im ganzen Bereich genügend genaue Formel für  $k_0$  erhält man, wenn man eine neue gleichwertige Plattendicke  $\delta'$  einführt, die das arithmetische Mittel zwischen einem für das betreffende Material abzuschätzenden halben Durchmesser und der Hälfte der vorher eingeführten gleichwertigen Plattendicke  $\delta$  darstellt.

Um aus  $k_0$  die wahre Wärmedurchgangszahl  $k$ , die auch den Einfluß der höheren Eigenfunktion berücksichtigt, zu berechnen, kann man das von H. Hausen für die Plattenfüllung entwickelte Verfahren fast unverändert auch auf Zylinder- und Kugelfüllungen übertragen.

Die Anregung zu dieser Arbeit gab Herr Prof. Dr.-Ing. H. Hausen. Ich bin Herrn Prof. Hausen dankbar für manchen wertvollen Hinweis und das ständige, freundliche Interesse, das er meiner Arbeit entgegengebracht hat.  
Eingeg. 4. Aug. 1947 [B 35]